Dipartimento di Statistica Università di Bologna

Matematica finanziaria aa 2013-2014

lezione 8: 27 febbraio 2014

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Errata pagina 9

- errata: $F(i) := i - \dfrac{f(i)}{f'(i)} = i - \dfrac{(1+i)^4(2+t) - \frac{2M}{C}}{4(i+1)^3(t+2)}$
- corrige: $F(i) := i - \dfrac{f(i)}{f'(i)} = i - \dfrac{(1+i)^4(2+i) - \frac{2M}{C}}{(1+i)^3(9+5i)}$
- errata: $i_1 = F(i_0) = 0,0149318, \quad i_2 = F(i_1) = 0,0149379$
- corrige: $i_1 = F(i_0) = 0,0149318, \quad i_2 = F(i_1) = 0,0149318$

Costituzione di un capitale Si vuole costituire mediante n versamenti costanti di importo R ai tempi $0, 1, \cdots, n-1$ un capitale K disponibile in n

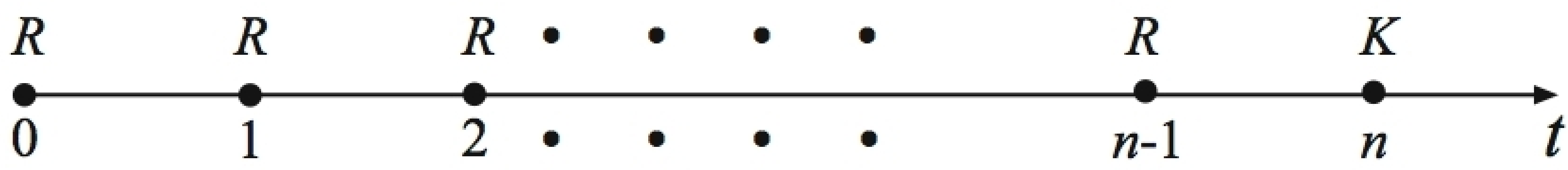

Figura 1: costituzione di un capitale con versamenti anticipati

Il montante (regime composto) in n dei versamenti è:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R\,(1+i)^{n-(s-1)}}$$

Il montante (regime composto) in n dei versamenti è:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{s}-\mathbf{1})}$$

e quindi

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{s}-\mathbf{1})} = \boldsymbol{R}\sum_{s=1}^{n} (\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}+\mathbf{1}}$$

e allora

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{s}-\mathbf{1})} = \boldsymbol{R}\sum_{s=1}^{n} (\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}+\mathbf{1}}$$

$$= \boldsymbol{R}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})\sum_{s=1}^{n} (\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}}$$

e allora

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R}\,(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{s}-1)} = \boldsymbol{R}\sum_{s=1}^{n}(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}+1}$$

$$= \boldsymbol{R}(1+\boldsymbol{i})\sum_{s=1}^{n}(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{R}(1+\boldsymbol{i})\, \boldsymbol{s}_{\overline{n|}\,i}$$

La rata R che va a costituire K deve quindi soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{R(1+i)\, s_{\overline{n|}\, i} = K}$$

La rata R che va a costituire K deve quindi soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{R(1+i)\, s_{\overline{n|}\, i} = K}$$

e quindi

$$\boldsymbol{R = \frac{K}{(1+i)\, s_{\overline{n|}\, i}}}$$

Costituzione di un capitale **Regime semplice** Il montante in n dei versamenti è:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R}\Big(\mathbf{1} + \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{s} + \mathbf{1})\Big) = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{n}\,\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{n} + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{i}\right)$$

Costituzione di un capitale **Regime semplice** Il montante in n dei versamenti è:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{R}\Big(\mathbf{1} + \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{s} + \mathbf{1})\Big) = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{n}\,\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{n} + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{i}\right)$$

si usa la formula per la somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{s} = \mathbf{1} + \cdots + \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

La rata R che va a costituire K deve quindi soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{K = R\,n\left(1 + \frac{n+1}{2}\,i\right)}$$

La rata R che va a costituire K deve quindi soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{K = R\,n\left(1 + \frac{n+1}{2}\,i\right)}$$

e quindi

$$\boldsymbol{R = \frac{K}{n\left(1 + \frac{n+1}{2}\,i\right)}}$$

Usiamo la formula di Taylor arrestata al secondo ordine con $K = 1$: nel regime composto

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) i + \frac{\left(n^2 + 6n + 5\right) i^2}{12n}}$$

Usiamo la formula di Taylor arrestata al secondo ordine con $K = 1$:

nel regime composto

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) i + \frac{\left(n^2 + 6n + 5\right) i^2}{12n}}$$

e nel regime semplice

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) i + \frac{\left(n^2 + 2n + 1\right) i^2}{4n}}$$

Costituire al 3% annuo il capitale di € 20 000 mediante 10 versamenti annuali in regime composto e in regime semplice.

Costituire al 3% annuo il capitale di € 20 000 mediante 10 versamenti annuali in regime composto e in regime semplice.

Regime composto

$$\boldsymbol{R = \frac{20\,000}{\frac{(1+0,03)^{10+1}-(1+0,03)}{0,03}} = 1\,693,7962}$$

Costituire al 3% annuo il capitale di € 20 000 mediante 10 versamenti annuali in regime composto e in regime semplice.

Regime composto

$$\boldsymbol{R = \frac{20\,000}{\frac{(1+0,03)^{10+1}-(1+0,03)}{0,03}} = 1\,693,7962}$$

Regime semplice

$$\boldsymbol{R = \frac{20\,000}{10\left(1+\frac{10+1}{2}0,03\right)} = 1\,716,7382}$$

Si vuole costituire il capitale $K = 20\,000$ con versamenti mensili anticipati di importo $R = 175$. Se il tasso di costituzione è del $3,8\%$ annuo quanti sono i versamenti da fare?

Si vuole costituire il capitale $K = 20\,000$ con versamenti mensili anticipati di importo $R = 175$. Se il tasso di costituzione è del $3,8\%$ annuo quanti sono i versamenti da fare?

La rata R che va a costituire R deve soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{R = \frac{K}{(1+i)\, s_{\overline{n|}\, i}} = \frac{K}{\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}}} \tag{1}$$

Si vuole costituire il capitale $K = 20\,000$ con versamenti mensili anticipati di importo $R = 175$. Se il tasso di costituzione è del $3,8\%$ annuo quanti sono i versamenti da fare?

La rata R che va a costituire R deve soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{R = \frac{K}{(1+i)\, s_{\overline{n|}\,i}} = \frac{K}{\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}}} \tag{1}$$

quindi

$$\boldsymbol{n = \frac{\ln\left(1 + \frac{i}{(i+1)}\frac{K}{R}\right)}{\ln(1+i)}}$$

Si vuole costituire il capitale $K = 20\,000$ con versamenti mensili anticipati di importo $R = 175$. Se il tasso di costituzione è del $3,8\%$ annuo quanti sono i versamenti da fare?

La rata R che va a costituire R deve soddisfare la relazione:

$$\boldsymbol{R = \frac{K}{(1+i)\, s_{\overline{n|}\, i}} = \frac{K}{\dfrac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}}} \tag{1}$$

quindi

$$\boldsymbol{n = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{i}{(i+1)}\dfrac{K}{R}\right)}{\ln(1+i)}}$$

Nel caso di specie $R = 175$, $K = 20\,000$, $i_{12} = (1,038)^{1/12} - 1$ quindi $\boldsymbol{n = 97,6648}$

i. attendere, dopo il versamento $97 = [n]$ che il montante raggiunga la somma voluta

i. attendere, dopo il versamento $97 = [n]$ che il montante raggiunga la somma voluta

ii. aumentare la rata in modo che bastino $97 = [n]$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

i. attendere, dopo il versamento $97 = [n]$ che il montante raggiunga la somma voluta

ii. aumentare la rata in modo che bastino $97 = [n]$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

iii. diminuire la rata in modo che bastino $98 = [n] + 1$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

i. attendere, dopo il versamento $97 = [n]$ che il montante raggiunga la somma voluta

ii. aumentare la rata in modo che bastino $97 = [n]$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

iii. diminuire la rata in modo che bastino $98 = [n] + 1$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

iv. fare $97 = [n]$ versamenti dell'importo $R = 175$ prefissato e un versamento complementare S in maniera da ottenere il capitale desiderato

   a) si può versare al tempo $97 = [n]$ contestualmente all'ultima rata di importo, prefissato

i. attendere, dopo il versamento $97 = [n]$ che il montante raggiunga la somma voluta

ii. aumentare la rata in modo che bastino $97 = [n]$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

iii. diminuire la rata in modo che bastino $98 = [n] + 1$ versamenti per ottenere il capitale desiderato

iv. fare $97 = [n]$ versamenti dell'importo $R = 175$ prefissato e un versamento complementare S in maniera da ottenere il capitale desiderato

   a) si può versare al tempo $97 = [n]$ contestualmente all'ultima rata di importo, prefissato

   b) si può versare al tempo $98 = [n] + 1$ dopo l'ultima rata di importo prefissato

Dunque sono possibili diversi tipi di *accomodamenti* vediamoli in dettaglio.

i. Il montante in 98 dei 97 versamenti anticipati è

$$\mathbf{175\,(1+\boldsymbol{i}_{12})\,\boldsymbol{s}_{\overline{97|}\,\boldsymbol{i}_{12}} = 19\,842,309}$$

Dunque sono possibili diversi tipi di *accomodamenti* vediamoli in dettaglio.

i. Il montante in 98 dei 97 versamenti anticipati è

$$\mathbf{175\,(1+i_{12})\,s_{\overline{97|}\,i_{12}} = 19\,842,309}$$

quindi il tempo di attesa τ, calcolato a partire dalla valuta 98 è dato in mesi da:

$$\mathbf{19\,842,309\,(1+i_{12})^{\tau} = 20\,000 \implies \tau = 2,54693}$$

in tal caso si devono attendere 2 mesi e 16 giorni.

ii. Se si sceglie di aumentare l'importo e fare 97 versamenti si applica la relazione standard con $n = 97$:

$$\boldsymbol{R_1 = \frac{20\,000}{(1 + i_{12})\, s_{\overline{97|}\, i_{12}}} = 176,391.}$$

ii. Se si sceglie di aumentare l'importo e fare 97 versamenti si applica la relazione standard con $n = 97$:

$$\boldsymbol{R_1 = \frac{20\,000}{(1 + i_{12})\, s_{\overline{97|}\, i_{12}}} = 176,391.}$$

iii. Se si sceglie di diminuire l'importo e fare 98 versamenti si applica la relazione standard con $n = 98$ in questo modo il capitale è disponibile al tempo 99:

ii. Se si sceglie di aumentare l'importo e fare 97 versamenti si applica la relazione standard con $n = 97$:

$$\boldsymbol{R_1 = \frac{20\,000}{(1 + i_{12})\, s_{\overline{97|}\, i_{12}}} = 176,391.}$$

iii. Se si sceglie di diminuire l'importo e fare 98 versamenti si applica la relazione standard con $n = 98$ in questo modo il capitale è disponibile al tempo 99:

$$\boldsymbol{R_2 = \frac{20\,000}{(1 + i_{12})\, s_{\overline{98|}\, i_{12}}} = 174,306.}$$

iv.a) Se si vuole integrare il versamento in 97 in modo da costituire il capitale in 98 si deve tener presente che il montante in 97 dei 97 versamenti di $R = 175$ è

$$\boldsymbol{M = R\, s_{\overline{97|}\, i_{12}}}.$$

iv.a) Se si vuole integrare il versamento in 97 in modo da costituire il capitale in 98 si deve tener presente che il montante in 97 dei 97 versamenti di $R = 175$ è

$$\boldsymbol{M = R\, s_{\overline{97|}\, i_{12}}}.$$

Allora l'integrazione X, costituente il capitale in 98, è individuata dalla relazione:

$$\boldsymbol{(M + X)\,(1 + i_{12}) = K}.$$

iv.a) Se si vuole integrare il versamento in 97 in modo da costituire il capitale in 98 si deve tener presente che il montante in 97 dei 97 versamenti di $R = 175$ è

$$\boldsymbol{M = R\, s_{\overline{97|}\, i_{12}}}.$$

Allora l'integrazione X, costituente il capitale in 98, è individuata dalla relazione:

$$\boldsymbol{(M + X)\,(1 + i_{12}) = K}.$$

risolvendo si trova $\boldsymbol{X = 157,202}$.

Se si vuole versare il 98 in modo da costituire il capitale in 99 si deve calcolare il montante in 98 dei 97 versamenti costanti, aggiungere l'integrazione e capitalizzare:

Se si vuole versare il 98 in modo da costituire il capitale in 99 si deve calcolare il montante in 98 dei 97 versamenti costanti, aggiungere l'integrazione e capitalizzare:

$$\boldsymbol{\left(175(1+i_{12})\, s_{\overline{97|}\, i_{12}} + Y\right)(1+i_{12}) = 20\,000 \implies Y = 95,628.}$$

Esercizio

Tiberio Gracco decide di costituire un capitale di €15 000 in tre anni con versamenti mensili al tasso $i_{12} = 0,00327$, inoltre decide che i versamenti nel primo e nel terzo anno siano uguali e pari alla metà degli importi versati durante il secondo anno. Calcolare l'importo dei versamenti del primo e del terzo anno.

Esercizio

Tiberio Gracco decide di costituire un capitale di €15 000 in tre anni con versamenti mensili al tasso $i_{12} = 0,00327$, inoltre decide che i versamenti nel primo e nel terzo anno siano uguali e pari alla metà degli importi versati durante il secondo anno. Calcolare l'importo dei versamenti del primo e del terzo anno.

Indichiamo con $2C$ i dodici versamenti fatti nel secondo anno, in modo che i versamenti del primo e del terzo anno siano pari a C. Imponiamo che il valore attuale dei 36 versamenti coincida con il valore attuale del capitale che si intende costituire.

Il valore attuale di versamenti del primo anno è pari a $C\, a_{\overline{12}|i_{12}}$.

Il valore attuale dei versamenti effettuati nel secondo anno è

$$(1+i_{12})^{-12}\; 2\, C\, a_{\overline{12}|i_{12}}\,.$$

Infine il valore attuale dei versamenti del terzo anno :

$$(1+i_{12})^{-24}\; C\, a_{\overline{12}|i_{12}}\,.$$

Il valore attuale di versamenti del primo anno è pari a $C\, a_{\overline{12}|i_{12}}$.

Il valore attuale dei versamenti effettuati nel secondo anno è

$$(1+i_{12})^{-12}\; 2\,C\, a_{\overline{12}|i_{12}}\,.$$

Infine il valore attuale dei versamenti del terzo anno :

$$(1+i_{12})^{-24}\; C\, a_{\overline{12}|i_{12}}\,.$$

C sarà allora determinato dall'equazione:

$$15\,000\,(1+i_{12})^{-36} = C\, a_{\overline{12}|i_{12}}\left(1+2\,(1+i_{12})^{-12}+(1+i_{12})^{-24}\right).$$

Risolvendo, otteniamo:

$$C = \frac{15\,000}{s_{\overline{12}|i_{12}}\left[\left(1+i_{12}\right)^{24}+2\left(1+i_{12}\right)^{12}+1\right]}.$$

Risolvendo, otteniamo:

$$C = \frac{15\,000}{s_{\overline{12}|i_{12}}\left[\left(1+i_{12}\right)^{24} + 2\left(1+i_{12}\right)^{12} + 1\right]}.$$

Essendo:

$$\begin{aligned} s_{\overline{12}|i_{12}} &= 12,2181898, \quad \left(1+i_{12}\right)^{12} = 1,0399535, \\ \left(1+i_{12}\right)^{24} &= 1,0815032, \end{aligned}$$

troviamo $C = 295,014841 = €295,01$.